

Certifier la qualité d'une heuristique sur graphes réels

Fabrice Lécuyer, Sorbonne, CNRS, LIP6, fabrice.lecuyer@lip6.fr

Pour d'importants problèmes de graphes, les algorithmes exacts ont des complexités et des temps de calcul qui sont rédhibitoires sur les gros graphes réels. En pratique, des algorithmes rapides sans garanties théoriques, appelés heuristiques, donnent de bons résultats approchés. Il serait intéressant d'avoir une indication sur la distance effective entre ce résultat et la valeur optimale.

La technique de certification de qualité présentée ici le permet : pour un graphe donné, elle consiste à calculer un résultat approché et une borne de la valeur optimale pour encadrer la qualité du résultat. Une telle borne peut être obtenue de plusieurs manières, et l'exemple de Vertex Cover permet d'en illustrer une qui se généralise aux problèmes ayant une k -approximation.

Le problème de Minimum Vertex Cover consiste à trouver un petit ensemble de nœuds qui couvre toutes les arêtes du graphe. Il est NP-difficile mais une 2-approximation est donnée par les nœuds de n'importe quel couplage maximal. La certification de qualité fonctionne ainsi pour un graphe G dont on ne connaît pas de couverture minimum C^* : on calcule d'abord une petite couverture C^- avec n'importe quelle heuristique, et on a $|C^*| \leq |C^-|$. Puis on trouve un couplage maximal dont les nœuds forment une grande couverture C^+ . Comme C^+ est issue d'un couplage, on sait qu'elle constitue une 2-approximation de la couverture minimum : $\frac{1}{2}|C^+| \leq |C^*|$. Cet encadrement de $|C^*|$ permet de garantir que le résultat heuristique C^- est à un facteur multiplicatif $\frac{2|C^-|}{|C^+|}$ de l'optimum. En pratique, ce ratio peut être beaucoup plus petit que le facteur 2 de la garantie théorique.

Testée sur un centaine de graphes réels (du web, des réseaux sociaux, des interactions biologiques etc), cette méthode permet de certifier la qualité de l'heuristique avec des ratios très bas dans la moitié des cas. Elle donne d'aussi bons résultats avec d'autres problèmes comme Independent Set.



FIGURE 1 – La qualité certifiée pour Vertex Cover prouve que la couverture trouvée est moins de 10% plus grande qu'optimum sur 50% des graphes.