

N. Bousquet, Q. Deschamps, L. De Meyer et T. Pierron : Coloration à distance 2 dans les graphes planaires

Nicolas Bousquet, LIRIS, Lyon, nicolas.bousquet@univ-lyon1.fr
Quentin Deschamps, LIRIS, Lyon, quentin.deschamps@univ-lyon1.fr
Lucas De Meyer, ENS Rennes lucas.de-meyer@ens-rennes.fr
Théon Pierron, LIRIS, Lyon, theo.pierron@univ-lyon1.fr

La coloration de graphes à distance 2 est une variante du problème de coloration de graphes classique. On cherche à trouver le nombre minimal de couleurs nécessaire pour colorer un graphe G de façon à ce que des sommets à distance au plus 2 aient des couleurs différentes. Ce nombre minimal de couleurs est noté $\chi_2(G)$. Dans le cas des graphes planaires, la conjecture la plus importante est due à Wegner dans [1] reliant $\chi_2(G)$ au degré maximal Δ du graphe.

Conjecture 1 (Wegner [1]). *Tout graphe planaire G de degré maximum Δ vérifie :*

$$\chi_2(G) \leq \begin{cases} 7 & \text{if } \Delta = 3, \\ \Delta + 5 & \text{if } 4 \leq \Delta \leq 7, \\ \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor + 1 & \text{if } \Delta \geq 8. \end{cases}$$

Cette conjecture a été prouvée asymptotiquement mais pour n'a été prouvée de manière exacte que dans le cas $\Delta = 3$. Le théorème suivant, valable dès lors que $\Delta \geq 9$ améliore les bornes connues pour $9 \leq \Delta \leq 31$.

Théorème 1. *Soit G un graphe planaire de degré maximal $\Delta \geq 9$. Alors, $\chi_2(G) \leq 2\Delta + 7$.*

Pour prouver ce théorème, on utilise une méthode de déchargement en supposant qu'un contre-exemple minimal au théorème existe et en exhibant une contradiction. Pour cela on définit un ordre sur les graphes différent de l'ordre classique, en choisissant un ordre qui minimise le nombre de sommets mais maximise le nombre d'arêtes. L'utilisation de cet ordre permet de réduire le nombre de configurations et de règles de déchargements (7 configurations et 4 règles) et ainsi de simplifier l'analyse du processus de déchargement.

Références

- [1] Gerd Wegner, *Graphs with given diameter and a coloring problem*, (1977).