

C. Gavoille et A. Jacques : Graphes universels pour de petites familles de graphes

Cyril Gavoille, LaBRI, U. Bordeaux, gavoille@labri.fr

Amaury Jacques, LaBRI, U. Bordeaux, amaury.jacques@labri.fr

Un *graphe universel (induit)* pour une famille donnée de graphes $\mathcal{F}$ est un graphe $\mathcal{U}$ contenant tous les graphes de $\mathcal{F}$ comme sous-graphe induit. L'étude des graphes universels est motivée par le fait que si une famille $\mathcal{F}$ possède un graphe universel $\mathcal{U}$, alors $\mathcal{F}$ possède également un schéma d'étiquetage d'adjacence avec des étiquettes de taille $\lceil \log_2 |V(\mathcal{U})| \rceil$ bits. Un schéma d'étiquetage est une manière distribuée de représenter un graphe en permettant de déterminer l'adjacence de deux sommets uniquement à l'aide d'étiquettes associées à ces mêmes sommets.

L'objectif de ce travail est de déterminer de nouvelles bornes inférieures pour le plus petit graphe universel (en nombre de sommets), notamment de la famille des caterpillars à n sommets [2] et des arbres à n sommets [1]. La meilleure borne inférieure actuellement connue pour ces familles est de $\lfloor 3n/2 \rfloor$. Elle peut être facilement obtenue en considérant le graphe universel d'une étoile et d'un chemin. Nous montrons que toute famille composée de trois caterpillars à n sommets possède un graphe universel d'au plus $3n/2 + O(1)$ sommets. Plus généralement nous montrons que toute famille composée de trois arbres à n sommets possède un graphe universel d'au plus $3n/2 + O(\log n)$ sommets. Cela démontre que toute tentative d'amélioration significative de la borne inférieure actuelle doit considérer au moins *quatre* arbres.

Ces résultats quasi-optimaux sont déduits d'une construction générale assez d'un graphe universel pour toute famille de t graphes, k -coloriable et de largeur-chemin p .

Références

- [1] S. Alstrup, S. Dahlgaard et M. Bæk Tejs Knudsen, *Optimal induced universal graphs and adjacency labeling for trees*, J. of the ACM : 64(4), 1–22, 2017.
- [2] C. Gavoille et A. Labourel, *Smaller Universal Graphs for Caterpillars and Graphs of Bounded Path-Width*, 11th International Colloquium on Graph Theory (ICGT), #54, Jul. 2022.